SF1624 Algebra och geometri

Tjugoförsta föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

2 december, 2009

Baser och koordinater

Definition (bas)

En *bas* för $\mathbb{R}^n$ är en uppsättning av n linjärt oberoende vektorer, $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$.

Det betyder att

- Varje vektor $\overline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas på ett unikt sätt som $\overline{v} = a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_n\overline{u}_n$

Definition (koordinater)

Koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i uttrycket för $\overline{v}$ kallas koordinaterna för $\overline{v}$ relativt basen $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$

Exempel

Vektorerna $\overline{u}_1 = (1, 2)^t$ och $\overline{u}_2 = (1, 3)^t$ utgör en bas, F, för $\mathbb{R}^2$ och koordinaterna för vektorn $\overline{v} = (1, -1)^t$ relativt basen F är $(4, -3)$ eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Koordinatvektorer

Definition (koordinatvektor)

Koordinaterna för en vektor $\overline{v}$ i basen F ges av n tal som bildar en *koordinatvektor*, $\overline{x}_F$ för $\overline{v}$ relativt basen F.

Det är praktiskt att använda namnet för basen som index för att hålla reda på vilken bas det gäller.

Exempel

Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ har koordinatvektorn $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_F$ relativt basen $F = \{(1,2)^t, (1,3)^t\}$.

Notera

Standardbasen $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ brukar betecknas E och vi skulle kunna skriva

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_E \quad \text{istället för bara} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Basbyten och koordinattransformationer

- Ofta blir problemen lättare att lösa om vi har ett koordinatsystem som är anpassat till situationen.
- Vi behöver kunna transformera koordinaterna från standardbasen till den nya och tillbaka.

Sats

Om F och G är två baser för $\mathbb{R}^n$ ges övergången mellan koordinater relativt F till koordinater relativt G av en linjär avbildning ${}_G T_F$.

Definition (koordinattransformation)

Om vektorn $\overline{u}$ har koordinatvektor $\overline{x}_F$ relativt basen F och $\overline{x}_G$ relativt basen G skriver vi

$$\overline{x}_F = {}_F T_G \overline{x}_G \quad \text{och} \quad \overline{x}_G = {}_G T_F \overline{x}_F$$

där ${}_F T_G$ är koordinattransformationen från G till F och ${}_G T_F$ den omvända.

Basbytesmatris

Eftersom koordinattransformationer är linjära avbildningar går de att beskriva med matriser.

Definition (Basbytesmatris)

Koordinattransformationen från basen F till basen G sker med hjälp av *basbytesmatrisen* ${}_GP_F$.

Sats

Kolonnerna i basbytesmatrisen ${}_GP_F$ är koordinatvektorerna för basvektorerna i F relativt basen G.

Exempel

Basbytesmatrisen för basbytet från $F = \{(1,2)^t, (1,3)^t\}$ till standardbasen E ges av

$$ {}_EP_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_E \right) $$

Omvända basbytet

Att gå tillbaka till den första basen från den andra blir det omvända basbytet. Vi får att

$$ {}_F T_G \circ {}_G T_F = {}_F T_G = \mathrm{Id} $$

Sats

Basbytesmatrisen för det omvända basbytet ges av inversen, dvs

$$ {}_F P_G = ({}_G P_F)^{-1}. $$

Exempel

Basbytesmatrisen för basbytet från standardbasen E till basen $F = \{(1,2)^t, (1,3)^t\}$ ges av

$$ {}_F P_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_F \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_F \right). $$

Basbyten för linjära avbildningar

När vi beskriver en linjär avbildning T från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$ som en matris gör vi det med hjälp av en bas för $\mathbb{R}^m$ och en bas för $\mathbb{R}^n$. Om vi inte säger något annat använder vi standardbasen i båda rummen.

Sats

Matrisen för T från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$ relativt basen F i $\mathbb{R}^m$ och basen G i $\mathbb{R}^n$ ges av

$${}_G A_F = {}_G P_E \cdot A \cdot {}_E P_F$$

om A är matrisen för T relativt standardbaserna.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

är matrisen med avseende på basen $\{(1,2)^t, (1,-1)^t\}$.